Ostatnią kwestią jest **wyznaczenie** prędkości $U(x)$ na zewnętrznej granicy warstwy przyściennej.

Otóż, jak już wspomniano, na zewnątrz warstwy przyściennej lepkość płynu nie odgrywa znaczącej roli.

Uprościmy badanie **zakładając brak lepkości** poza warstwą przyścienną...
Skoro tak, to z obowiązującego tam równania Eulera wynika równanie Bernoulliego. Dalej: jeśli **przed** opływanym konturem ruch jest jednorodny, to znaczy prędkość jest wszędzie taka sama (idzie o ten fragment obszaru, z którego wychodzą linie prądu sytuujące się w otoczeniu opływanego konturu) i, dodatkowo, ciśnienie jest też wszędzie jednakowe, to **stała Bernoulliego** jest na wszystkich liniach prądu **jednakowa**. A więc ruch w zewnątrz konturu jest **bezwirowy**: $\operatorname{rot}\vec{V}=0$. Tym samym stwierdzamy, iż istnieje **potencjał prędkości** φ i prędkość jest gradientem tego potencjału:

$$\vec{V}=\operatorname{grad}\varphi$$

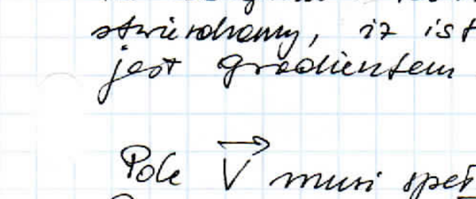
Pole $\vec{V}$ musi spełniać równanie ciągłości $\operatorname{div}\vec{V}=0$.
Podstawiamy tu $\vec{V}$ i otrzymujemy równanie **Laplace'a**:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\Delta\varphi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi=0$$

Funkcja spełniająca równanie Laplace'a jest nazywana "**funkcją harmoniczną**".

Daleko od opływanego konturu znamy (zakładamy, że znamy) stałą prędkość:

$$\lim_{r\to\infty}\vec{V}=\vec{U}_\infty$$



Ponieważ **warstwa przyścienna jest cienka** $\left(\delta\sim\sqrt{\frac{x\nu}{U}}=\frac{x}{\sqrt{Re_x}}\right)$ to, przy wielkich Re zamiast stawiać warunek brzegowy na zewnętrznej granicy warstwy przyjmujemy, iż **na konturze składowa normalna** prędkości **jest zerem**:

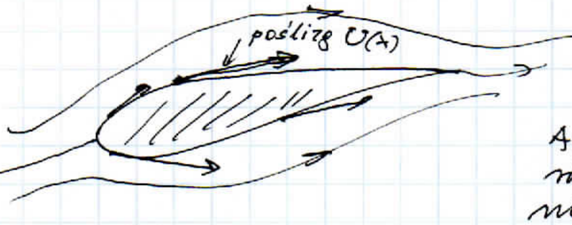
$$V_n\Big|_{kont}=\vec{n}\cdot\vec{V}\Big|_{kont}=\vec{n}\cdot\operatorname{grad}\varphi\Big|_{kont}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{kont.}=0$$

Teraz rozwiązujemy zagadnienie: $\Delta\varphi=0$, $\operatorname{grad}\varphi\Big|_\infty=\vec{U}_\infty$, $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{kont}=0$ i wyznaczamy wartość prędkości na konturze.
To składowa styczna prędkości (bo $V_n=0$). Teraz – uznajemy, że jest to prędkość na zewnętrznej granicy warstwy...

Rekapitulujemy. (I) **odrzucamy warstwę**
(II) **wyznaczamy ruch potencjalny w zewnątrz konturu**
(III) **składową styczną** prędkości uznajemy za $U(x)$ – prędkość na zewnętrznej granicy warstwy.

Płyn bez lepkości **ślizga** się po opływanym konturze.
Składowa styczna $U(x)$ to **prędkość poślizgu** tego płynu.

WAŻNE!



Oczywiście, że popełnia się błąd. Dlatego, że zewnętrzna granica warstwy tworzy inny kontur, niż kontur wyjściowy. Ale - dla wielkich liczb Reynoldsa - różnica jest znikoma. Wprowadzone zniekształcenie nie jest znaczące.

Można dokonać ponownego wyznaczenia ruchu potencjalnego pogrubiając kontur o δ_*. Nie spowoduje to istotnej zmiany.

Powróćmy do wyznaczania potencjału φ. Daleko od konturu $\vec{V} \to \vec{U}_\infty$. Ponieważ $\vec{U}_\infty = \mathrm{grad}(\vec{U}_\infty \cdot \vec{r}) = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}(u_{\infty k} x_k) = \vec{e}_i U_{\infty k} \delta_{ki} = \vec{e}_i u_{\infty i}$, to

$$\varphi = \vec{U}_\infty \cdot \vec{r} + \text{potencjał o pochodnych znikających w } \infty.$$

Jasne, że $\vec{U}_\infty \cdot \vec{r}$ spełnia równanie Laplace'a. Potencjał o pochodnych znikających musi też spełniać to równanie.

Rozważmy dwa proste potencjały: $\varphi = \Theta = \mathrm{arctg}(y/x)$ i $\varphi = \ln r$. Przekonamy się, że obydwie te funkcje są harmoniczne, tzn. $\Delta\varphi = 0$ w obu przypadkach. Wygodnie użyć współrzędnych biegunowych. Jest tak:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \Theta^2}$$

Funkcja $\varphi = \Theta$ oczywiście spełnia równanie Laplace'a. Druga z nich - też, z wyjątkiem $r = 0$, gdzie logarytm nie jest określony.

Obliczmy prędkości: $\mathrm{grad}(\ln r) = \left(\vec{e}_1 \frac{\partial r}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial r}{\partial y}\right)\frac{1}{r}$. Ponieważ $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{r} 2x_i$, a więc

$$V_x = \frac{x}{r^2} \text{ i } V_y = \frac{y}{r^2}. \quad |\vec{V}|^2 = V_x^2 + V_y^2 = \frac{x^2+y^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}$$

Prędkość znika w nieskończoności. Jest - po prostu - $V = |\vec{V}| = \frac{1}{r}$

W drugim przypadku jest podobnie:

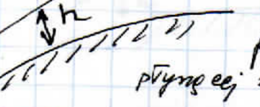
$$\vec{V} = \mathrm{grad}(\mathrm{arctg}\, y/x) = \left(\vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)\mathrm{arctg}\, y/x = \vec{e}_1 \frac{-y}{r^2} + \vec{e}_2 \frac{x}{r^2}$$

co oznacza, że

$$V_x = -y/r^2 \text{ i } V_y = x/r^2. \quad V = |\vec{V}| = \frac{1}{r} \text{ jak uprzednio.}$$

Weźmy pod uwagę kąt, jaki jest tworzony przez wektor $\vec{V}$ i oś Ox: $\varkappa = \mathrm{arctg}\, V_y/V_x$. W pierwszym przypadku mamy $\varkappa = \mathrm{arctg}\, y/x = \Theta$ a w drugim $\varkappa = -\mathrm{arctg}\, x/y$. Łatwo zauważyć, że obydwa tangensy po pomnożeniu dają -1. A więc kierunki prędkości są prostopadłe...

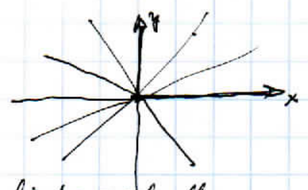
Pierwszy przypadek to ŹRÓDŁO
Drugi - WIR POTENCJALNY



Wydatek płynący z prędkością U przez pogrubienie i wydatek płynący przez warstwę jest zastąpiony wydatkiem który byłby w warstwie płynącej z prędkością U: $U \cdot h + \int u\,dy = \int^\delta U\,dy \to h = \int_0^\delta (1 - \frac{u}{U})\,dy = \delta_*$

Dla obydwu rozpatrywanych przypadków trywialnie widać linie prądu.
(To linie, do których styczne są wektory pola prędkości)

Jeśli $\varphi = \ln r$, to linie prądu są prostymi $\Theta = const$. Widać z kolei, iż linie na których potencjał jest stały, to $\ln r = const \longrightarrow$ $\longrightarrow r = const$ ($r > 0$!). Są ortogonalne do linii prądu.



linie prądu dla potencjału logarytmicznego

To ogólna cecha, bo stały potencjał $\varphi = const$ to $d\varphi = 0$.
A przecież

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = V_x\,dx + V_y\,dy,$$

i otrzymamy: $\frac{dy}{dx} = -V_x/V_y$.

Linia prądu jest określona przez równanie

$$\frac{dy}{dx} = V_y/V_x \quad \text{(bo wektor } \vec{V} \text{ jest do niej styczny)}$$

Iloczyn $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\varphi=const} \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_{l.prądu} = -1$ oznacza ortogonalność.

W drugim przypadku jest – jak widać tak: linie stałego potencjału to proste $\Theta = const$, a linie prądu są okręgami $r = const$.

Czytelnik z łatwością stwierdzi, że przez linię otaczającą źródło płynie wydatek. Dla okręgu otaczającego jest:

$$Q = \oint \vec{n}\cdot\vec{V}\,ds = \oint\left(\frac{x}{r}\cdot\frac{x}{r^2} + \frac{y}{r}\cdot\frac{y}{r^2}\right) r\,d\Theta = \oint d\Theta = 2\pi$$

niezależny od kształtu tej zamkniętej linii.*)

W drugim przypadku wydatek jest oczywiście zerem.

Ważną wielkością jest **cyrkulacja**. To taka wielkość:

$$\Gamma = \int_{\widehat{AB}} \vec{V}\cdot\vec{ds}$$

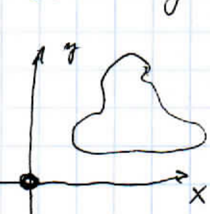
Całkujemy wzdłuż dowolnej linii $\widehat{AB}$. Ponieważ $\vec{V}\cdot\vec{ds} = V_x dx + V_y dy$ to:

$$\Gamma = \int_{\widehat{AB}} V_x dx + V_y dy = \int_{\widehat{AB}} d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Obliczmy cyrkulację dla linii otaczającej **Wir** potencjalny. Jest:

$$\Gamma = \varphi(B) - \varphi(A) = \int_0^{2\pi} d\Theta = 2\pi.$$

Jeśli linia $\widehat{AB}$ nie otacza punktu $r = 0$ w którym występuje osobliwość wiru (prędkość jest dowolna!) to oczywiście $\Gamma = 0$.



Rzeczywiście,

$$\oint \vec{V}\cdot\vec{ds} = \oint V_x dx + V_y dy = \iint_{pole}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)dA$$
$$= \iint_{pole} \text{rot}\,\vec{V}\,dA = \iint_{pole}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)dA \equiv 0.$$

Rachunek tu pokazany dotyczy **dowolnego** potencjału i dowolnego ruchu potencjalnego w obszarze wewnątrz zamkniętej linii. Wir potencjalny ma osobliwość w $r = 0$ i w punkcie tym nie można zastosować twierdzenia Stokesa tak, jak to uczyniłem powyżej.

---

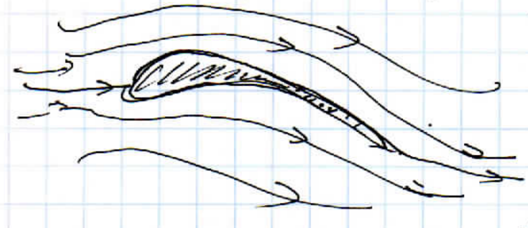
*) Rozważmy obszar pomiędzy dowolną linią (z ząbkami) i okręgiem ją otaczającym. Łączniki tych linii zbliżamy wzajemnie.

$$\oint \vec{n}\cdot\vec{V}ds = \int_{ząbki} \vec{n}\cdot\vec{V}ds + \int_{łączniki} \vec{n}\cdot\vec{V}ds + \int_{zewnętrzny\ okrąg} \vec{n}\cdot\vec{V}ds = \int_{ząbki} \vec{n}\cdot\vec{V}ds + \int_{zewnętrzny\ okrąg} \vec{n}\cdot\vec{V}ds.$$

Ale $\oint \vec{n}\cdot\vec{V}ds = \iint_{pole\ pomiędzy} \text{div}\,\vec{V}\,dA = 0$. Tym samym $\int_{ząbki} + \int_{okrąg} = 0$. A te zwroty są przeciwne! $\int_{okrąg} = \int_{ząbki}$. Koniec dowodu

W obydwu pokazanych przypadkach prędkość znika dla $r \to \infty$.

Potencjał dla opływu konturu typu "profil płata" lub "profil łopatki" można napisać tak:



$$\varphi = \vec{U}_\infty \cdot \vec{r} + \frac{\Gamma}{2\pi}\Theta + \varphi_*(x,y)$$

Trzeci składnik to funkcja harmoniczna ($\Delta\varphi_* = 0$) o pochodnych znikających w nieskończoności **szybciej niż const/r**. (Bo pochodne drugiego składnika $\frac{\Gamma}{2\pi}\Theta$ znikają $\sim 1/r$)

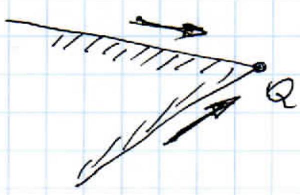
Aby wyznaczyć φ_* – znikającą w nieskończoności z pochodnymi które mają podaną własność – formułujemy zadanie:

$$\Delta\varphi_* = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_*}{\partial n}\Big|_{kontur} = -\left(\vec{U}_\infty \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial n} + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\partial\Theta}{\partial n}\right)\Big|_{kontur}.$$

Innymi słowy: szukamy funkcji spełniającej równanie Laplace'a $\Delta\varphi_* = 0$ w zewnątrz zadanego konturu, która na tym konturze realizuje warunek brzegowy narzucony na pochodną normalną (patrz str. 12)

Taki warunek dla funkcji harmonicznej to **zagadnienie Neumana**. Jest to jedno ze standardowych zadań fizyki matematycznej. Metod jego rozwiązania jest wiele. Dla dowolnego konturu – są to metody numeryczne.

Czytelnik zauważył, że nie określiliśmy jeszcze **wartości** stałej Γ_0. Otóż, postulat prowadzący do tego jest prosty: W końcowym, ostrym "czubku" konturu **prędkość poślizgu** wynikająca z ruchu potencjalnego jest **zerem**:

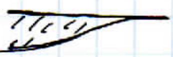


$$\vec{V}\big|_Q = 0.$$

Tak musi być, bo w przeciwnym wypadku w punkcie Q wystąpiłyby dwa różne wektory prędkości **o różnych kierunkach.**

Postulat ten nazywany jest "**hipotezą Kutty – Żukowskiego**".

Stałą Γ trzeba wyznaczyć z warunku znikania prędkości w ostrzu. (Czytelnik może spotkać paranoiczny przypadek rozważania "ostrza o wspólnej stycznej – tak jak na szkicu obok.



Taki "obiekt materialny" oczywiście nie może istnieć. Nie warto więc rozważać, co by było, gdyby było...*)

Jeśli z kolei końcowa część konturu jest pozbawiona ostrza, to naśladując podaną uprzednio hipotezę postuluje się znikanie prędkości w miejscu o największej krzywiźnie.

Jest to analogia prostego faktu nieograniczoności krzywizny w załamaniu konturu formującym tzw. ostrze.

Końcowo dodamy, iż z punktów oznaczonych literą Q nazywanych **krawędziami spływu** wysnuta jest rozszczepiona w punkcie spiętrzenia na przodzie konturu tzw. **zerowa linia prądu**.

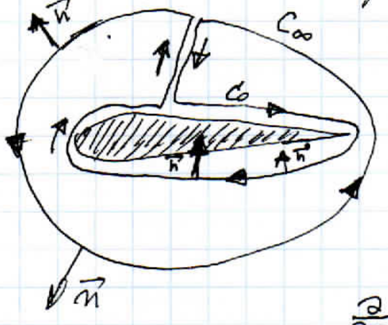
*) Prędkość w końcówce wspólnego kierunku po obydwu stronach powinna być taka sama....

Wróćmy na moment do wyrażenia przedstawiającego potencjał φ (str. 15)
Wygląda on tak:

$$\varphi = \vec{U}_\infty \cdot \vec{r} + \frac{\Gamma}{2\pi}\Theta + \varphi_*(x,y)$$

Nie występuje tu potencjał logarytmiczny. Taki potencjał generuje pole prędkości znikające w nieskończoności (tak, jak potencjał Θ). To pole znika jak $1/r$. A więc – nie zakłóca ruchu z prędkością $\vec{U}_\infty$ jeśli jest daleko od konturu.
Tyle, że jest to potencjał określający **źródło**. Dodatnie albo ujemne. Jedno źródło. To oznacza, że nie będzie zachowana masa (wydatek), bo dla każdej zamkniętej linii otaczającej kontur występuje niezerowy strumień płynu.

Na podstawie przedstawionego wyżej potencjału można obliczyć siłę działającą na opływany kontur.



Nie występuje lepkość. A więc siła działająca na pokazaną linię wynika jedynie z występowania ciśnienia. Znajdziemy siłę działającą na płyn – a siła działająca na kontur będzie do niej przeciwna.
Piszemy równanie wektorowe Eulera. Ruch jest ustalony. Jest tak:

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_x \vec{V}\rho) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y \vec{V}\rho) + \operatorname{grad} p = 0. \quad *)$$

Całkujemy w obszarze pomiędzy łącznikami, linią C_0 i linią C_∞.
Następnie stosujemy twierdzenie GGO. To znaczy: przechodzimy na brzeg zastępując pochodne rzutami normalnej na odpowiednie osie:

$$\oint (n_x v_x + n_y v_y)\rho \vec{V}\, ds + \oint (n_x \vec{e}_1 + n_y \vec{e}_2)\, p\, ds = 0$$

Znaki $\oint$ w całkach oznaczają całkowanie wzdłuż C_∞, łączników i C_0.

Całki wzdłuż łączników znoszą się – bo całkuje się w przeciwnych kierunkach.
Widzimy też, że $n_x V_x + n_y V_y = V_n$. Dalej: $n_x \vec{e}_1 + n_y \vec{e}_y = \vec{n}$.
A więc jest tak:

$$\oint_{C_0} \rho V_n \vec{V}\, ds + \oint_{C_\infty} \rho V_n \vec{V}\, ds + \oint_{C_0} \vec{n} p\, ds + \oint_{C_\infty} \vec{n} p\, ds = 0$$

Na konturze – do którego dotyka "ściągnięta" linia C_0 składowa normalna prędkości V_n jest zerem:

$$V_n|_{C_0} = 0$$

Iloczyn $\vec{n} p\, ds$ to elementarna siła działająca na odcinek ds konturu. Całka z tego wyrażenia to siła. A więc oczekiwany wynik jest taki:

$$-\vec{F} = \oint_{C_\infty} (\rho V_n \vec{V} + \vec{n} p)\, ds.$$

Linia C_∞ jest dowolnie daleko od opływanego konturu. Ma dowolny kształt.
Wybieramy ją tak, by rachunki były proste.
Jest tak wtedy, gdy C_∞ to okrąg o wielkim promieniu.

*) Już kilka razy wykorzystaliśmy przekształcenie:
$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y \vec{V}) = \rho V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \rho V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + \vec{V}\left(\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}\right).$$ Ale: $\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_y) = 0$

Pozostaje jeszcze wybrać układ współrzędnych. Znów chcemy prostoty. Wybierzmy oś Ox i wersor $\vec{e}_1$ wzdłuż kierunku wektora $\vec{U}_\infty$. Wtedy $\vec{U}_\infty \cdot \vec{r} = U_\infty \cdot x$ (Udowodnij to!) i potencjał φ jest taki:

$$\varphi = U_\infty x + \frac{\Gamma}{2\pi}\Theta(x,y) + \varphi_*(x,y)$$

Wyznaczamy składowe prędkości. Będą potrzebne na okręgu C_∞:

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = U_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{\partial \varphi_*}{\partial x} = U_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\sin\Theta}{r} + \frac{\partial \varphi_*}{\partial x}$$

$$V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial \varphi_*}{\partial y} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\cos\Theta}{r} + \frac{\partial \varphi_*}{\partial y}$$

Pamiętamy, że pochodne $\partial\varphi_*/\partial x$ i $\partial\varphi_*/\partial y$ znikają dla $r \to \infty$ szybciej, niż $const/r$. Na C_∞ to $const/R$.
Z kolei długość elementarnej wielkości ds to $Rd\Theta$: $ds = Rd\Theta$

Wniosek jest bardzo prosty: jeśli w wyrażeniu podcałkowym wystąpi składnik **znikający szybciej niż** $1/r$ – – na przykład taki, jak $1/r^{1+\alpha}$ (albo ogólniej, ale taki, że $\frac{r}{f(r)} \to 0$ gdy $r \to \infty$), to, po pomnożeniu przez ds i podstawieniu $r = R$ oraz przejściu $R \to \infty$ całka z tego składnika znika.
A więc mnożenie $V_n \cdot \vec{V}$ dla składowych – **po pominięciu pochodnych** potencjału φ_* jest następujące:

$$V_n = V_x n_x + V_y n_y = V_x \cdot \cos\Theta + V_y \sin\Theta = \left(U_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\sin\Theta}{r}\right)\cos\Theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\cos\Theta}{r}\sin\Theta$$

czyli:

$$\mathbf{V_n = U_\infty \cdot \cos\Theta}$$

bo $n_x = \cos\Theta$, $n_y = \sin\Theta$. Mnożymy dalej:

$$\rho V_n \cdot V_x \cong \rho U_\infty \cos\Theta\left(U_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\sin\Theta}{r}\right) = \rho U_\infty^2 \cos\Theta + \frac{\rho U_\infty \Gamma}{2\pi}\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{r}$$

$$\rho V_n \cdot V_y \cong \rho U_\infty \cos\Theta \cdot \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\cos\Theta}{r} = \frac{\rho U_\infty \Gamma}{2\pi}\frac{\cos^2\Theta}{r}$$

Część ciśnieniowa wymaga obliczenia p. Piszemy równanie Bernoulliego:

$$\rho\frac{U_\infty^2}{2} + p_\infty = \rho\left(V_x^2 + V_y^2\right)/2 + p$$

Pamiętamy o pominięciu wyrazów zawierających mianowniki o wysokich potęgach r. Pozostaje:

$$\frac{\rho U_\infty^2}{2} + p_\infty = \rho\left[U_\infty^2 - \frac{U_\infty \Gamma}{\pi r}\sin\Theta\right]/2 + p$$

i, wobec tego, $p = p_\infty + \rho\frac{U_\infty \Gamma}{2\pi r}\sin\Theta$

Składowa F_x siły jest następująca:

$$-F_x = \int_0^{2\pi}\left[\rho U_\infty^2\cos\Theta + \rho\frac{U_\infty \Gamma}{2\pi}\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{r} + \left(p_\infty + \rho\frac{U_\infty\Gamma}{2\pi r}\sin\Theta\right)\cos\Theta\right] r\, d\Theta$$

Całki typu $\int_0^{2\pi} const.\cos\Theta\, d\Theta$ są zerami. Również całka zawierająca $\cos\Theta\sin\Theta$ znika...
Stwierdzamy: $F_x = 0$. Brak składowej "wzdłuż" prędkości $\vec{U}_\infty$. WAŻNE!
To oznacza brak oporu. (Należało się tego spodziewać: brak tarcia oznacza zerową dyssypację energii. A iloczyn $U_\infty \cdot F_x$ to dyssypowana moc...)
Druga składowa jest **następująca**:

$$-F_y = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho U_\infty \Gamma}{2\pi}\frac{\cos^2\Theta}{r} + \left(p_\infty + \frac{\rho U_\infty \Gamma}{2\pi r}\sin\Theta\right)\sin\Theta\right] r\, d\Theta = \rho U_\infty \Gamma$$ WAŻNE!

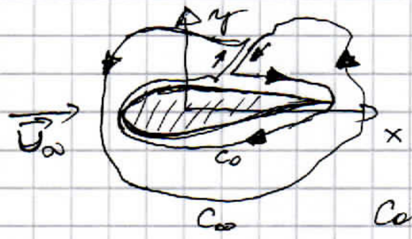
Stwierdzamy: $F_y = -\rho U_\infty \Gamma$. To składowa siły prostopadła do kierunku prędkości $\vec{U}_\infty$ daleko od opływanego konturu.
Taka składowa to **SIŁA NOŚNA**.
Dzięki niej samoloty latają, łopatki sprężarki (i pompy) powodują wzrost ciśnienia, a łopatki turbiny odbierają moc od płynącego płynu...

Zauważamy, że dla $\Gamma = 0$ siły nie ma.
To znaczy: DLA RUCHU BEZWIROWEGO (i dla płynu nielepkiego, z $\rho = const$) BRAK "REAKCJI".
To **paradoks d'Alemberta** (tak się "to" nazywa...)
Jest tak również dla ruchu przestrzennego.

Aby wytworzyć **siłę nośną** – prostopadłą do kierunku wyznaczonego przez wektor $\vec{U}_\infty$ trzeba, by w jakiejś części obszaru **ruch** był **wirowy**. (Co najmniej w jakiejś części...)

Lepkość powodująca **dyssypację** "wytwarza" opór. Składowa siły w kierunku $\vec{U}_\infty$ to **siła oporu**. Jak wiemy, można ją wyznaczyć stosując teorię warstwy przyściennej.

Zauważmy jeszcze, że cyrkulację Γ można obliczyć dokonując całkowania po obwodzie konturu. Rachunek dowodzący tego faktu jest analogiczny do podanego na str. 91/(14) odnośnie wydatku.



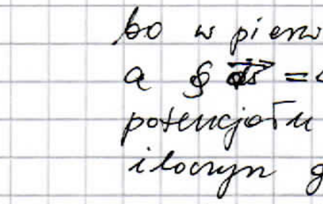
Otóż, w obszarze pomiędzy liniami C_0, C_∞ i łącznikami ruch jest potencjalny, a więc $\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \omega = \operatorname{rot}\vec{v}|_{oś\, z} = 0$
Całkujemy to w obszarze opisanym wyżej:

$$0 = \iint\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)d\Omega = \oint_{C_0 \cup C_\infty \cup \text{łączniki}} (v_x dx - v_y dy) = \int \vec{v}\cdot d\vec{s}$$

Całki obliczone "po łącznikach" kasują się. Zwroty całkowania na C_∞ i C_0 są przeciwne. A więc

$$\oint_{C_\infty} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \oint_{C_0} \vec{v}\, ds = 0 \rightarrow \oint_{C_\infty} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \oint_{C_0} \vec{v}\, d\vec{s} = \Gamma$$

Jasne, że $\oint_{C_\infty} \vec{V}\cdot d\vec{s} = \oint_{C_\infty} \vec{U}_\infty \cdot d\vec{s} + \frac{\Gamma}{2\pi}\oint_{C_\infty} d\Theta + 0 = \Gamma$, $\vec{v} = \operatorname{grad}\varphi$
bo w pierwszej całce $\vec{U}_\infty$ – to stały wektor – można wyprowadzić przed całkę a $\oint d\vec{s} = 0$ dla linii zamkniętej. Dalej: $\operatorname{grad}\Theta \cdot d\vec{s} = d\Theta$. Pochodne potencjału φ_* znikają na linii C_∞ szybciej, niż $\frac{1}{r}$. A więc iloczyn $\operatorname{grad}\varphi_* \cdot d\vec{s}$ można oszacować tak: $|\operatorname{grad}\varphi_* \cdot d\vec{s}| < O(\frac{1}{r})d\Theta$.
co eliminuje całkę zawierającą pochodne φ_* z rachunku...
Cyrkulacja Γ **jest zerem dla symetrycznego opływu symetrycznego konturu.**

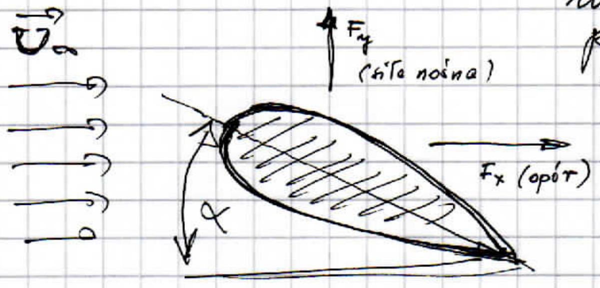


Siła nośna nie wystąpi. Opór – oczywiście jest.
Zamiast używać wielkości wymiarowych – taką jest siła – używa się WSPÓŁCZYNNIKÓW SIŁY nośnej i oporu.

$$C_y = \frac{F_y}{\frac{\rho U_\infty^2}{2}\cdot L \cdot 1}, \quad C_x = \frac{F_x}{\frac{\rho U_\infty^2}{2}\cdot L \cdot 1}$$

L to **cięciwa**, $\rho U_\infty^2/2$ ma wymiar ciśnienia, a jedynka to jednostkowa długość prostopadła do płaszczyzny ruchu...

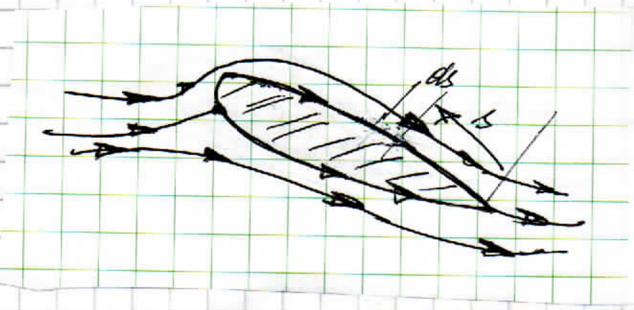
Rozważmy również usytuowanie konturu względem napływającego strumienia płynu. Rozmaitość tą uzyskamy przez ustawienie cięciwy profilu pod kątem w stosunku do wektora $\vec{U}_\infty$.



Spodziewamy się, że dla symetrycznego konturu – i **symetrycznego** pola prędkości siła nośna F_y i, co za tym idzie, **współczynnik** siły nośnej C_y będą **zerowe**.

Wzrost kąta (**to kąt natarcia**) pomiędzy cięciwą i $\vec{U}_\infty$ powoduje asymetrię ruchu. Przyczynki cyrkulacji

$$d\Gamma = \vec{v}\cdot d\vec{s}$$



są ujemne na grzbietowej stronie konturu i dodatnie na stronie spodniej. (Zwroty $\vec{v}$ i $d\vec{s}$ są przeciwne na grzbiecie i zgodne na spodzie). Wychylenie konturu takie, jak na górnym szkicu zwiększa ujemną część cyrkulacji i zwiększa siłę nośną ($dF_y = -\rho U_\infty d\Gamma$).

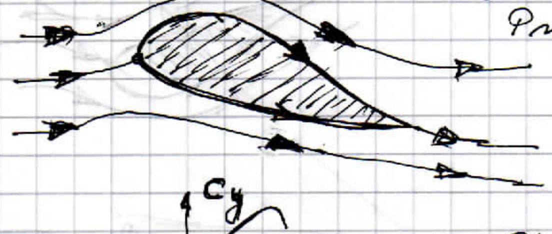
Wykres

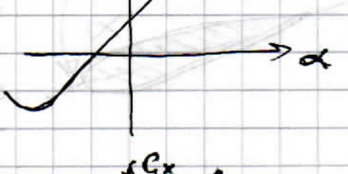
$$C_y = C_y(\alpha)$$

dla konturu symetrycznego jest pokazany na szkicu. Przy dostatecznie dużym α (~ ponad 20°) następuje istotny **wzrost obszaru oderwania** warstwy przyściennej i silne zaburzenie ruchu w rozległym otoczeniu konturu. Ruch ten nie jest potencjalny (w rozległym otoczeniu...) i związek określający F_y nie ma zastosowania. Siła nośna **przestaje rosnąć przy wzroście α i przy dalszym jego wzroście gwałtownie maleje.**

Opór F_x jest – oczywiście – zawsze dodatni. Jego minimum zachodzi dla ruchu symetrycznego, tzn. dla $\alpha = 0$. Przy kątach natarcia odpowiadających obszernemu oderwaniu opór szybko narasta.

Dla konturu niesymetrycznego minimum C_x i zero C_y występują nie dla $\alpha = 0$. Przy takiej wartości – wobec asymetrii – oczywiście występuje siła nośna. Brak bowiem symetrii... Minimum oporu jest obserwowane dla kąta natarcia bliskiego tego, przy którym występuje zerowa siła nośna.





Dla specjalnych kształtów konturu C_x ma specyficzną zależność od kąta natarcia α. Pojawia się widoczne obniżenie oporu (niestety, nie dla znacznego przedziału α) wynikające z wydłużenia odcinków występowania ruchu laminarnego w warstwie przyściennej.